

Composée de fonctions - Exercices

■ Exercice 1

On considère les fonctions f , g et h

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$g(x) = \sin(x)$$

$$h(x) = 2 + \frac{1}{x}$$

Déterminer les composées suivantes:

1) $f \circ g \circ h$

2) $g \circ f \circ h$

3) $h \circ f \circ g$

4) $g \circ h \circ f$

■ Solutions

$$1) f(g(h(x))) = f\left(g\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\sin\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) = \sqrt{\sin\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 1}$$

$$2) g(f(h(x))) = g\left(f\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \sin\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)$$

$$3) h(f(g(x))) = h(f(\sin(x))) = h(\sqrt{\sin(x) - 1}) = 2 + \frac{1}{\sqrt{\sin(x) - 1}}$$

$$4) g(h(f(x))) = g(h(\sqrt{x-1})) = g\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = \sin\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

■ Exercice 2

On considère les fonctions f , g et h

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$h(x) = \sqrt{x} + 1$$

Déterminer les composées suivantes:

1) $h \circ g \circ f$

2) $g \circ f \circ h$

3) $f \circ g \circ f$

4) $g \circ h \circ f$

■ Solutions

$$1) h(g(f(x))) = h(g(x^2 - 1)) = h\left(\frac{1}{x^2 - 2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 2}} + 1$$

$$2) g(f(h(x))) = g(f(\sqrt{x} + 1)) = g((\sqrt{x} + 1)^2 - 1) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2 - 2}$$

$$3) f(g(f(x))) = f(g(x^2 - 1)) = f\left(\frac{1}{x^2 - 2}\right) = \frac{1}{(x^2 - 2)^2} - 1$$

$$4) g(h(f(x))) = g(h(x^2 - 1)) = g(\sqrt{x^2 - 1} + 1) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

■ Exercice 3

On considère les fonctions f , g et h

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$h(x) = x^3$$

Déterminer les composées suivantes:

$$1) f \circ g \circ h$$

$$2) g \circ h \circ h$$

$$3) h \circ g \circ f$$

$$4) g \circ h \circ f$$

■ Solutions

$$1) f(g(h(x))) = f(g(x^3)) = f\left(\frac{x^3}{x^3 + 2}\right) = \left| \frac{x^3}{x^3 + 2} \right|$$

$$2) g(h(h(x))) = g(h(x^3)) = g(x^9) = \frac{x^9}{x^9 + 2}$$

$$3) h(g(f(x))) = h(g(|x|)) = h\left(\frac{|x|}{|x| + 2}\right) = \frac{|x|^3}{(|x| + 2)^3}$$

$$4) g(h(f(x))) = g(h(|x|)) = g(|x|^3) = \frac{|x|^3}{|x|^3 + 2}$$