Fonctions cyclométriques

- Déterminer le domaine de définition, les éventuelles racines et la fonction dérivée de

1) $f(x) = \dfrac{1}{\text{Arctg}(2x)}$

2) $f(x) = \text{Arccos}(1-x)$

3) $f(x) = \text{Arcsin}\left(x^3\right)$

4) $f(x) = \text{Arcsin}^3(x)$

5) $f(x) = \text{Arccos}\left(x^2-4\right)$

6) $f(x) = \text{Arccos}\left(-x^2-2x+1\right)$

7) $f(x) = \text{Arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

8) $f(x) = \text{Arccos}\left(-x^2-2x+1\right)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\text{Arcsin}(2x)}$

10) $f(x) = \text{Arccos}\left(1-x^3\right)$

Solutions

1) Domf $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

racines: $\emptyset$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(4x^2+1)\,\text{Arctg}^2(2x)}$

2) Domf $= [0, 2]$

racines: $\{ 0 \}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

3) Domf $= [-1, 1]$

racines: $\{ 0 \}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

4) Domf $= [-1, 1]$

racines: $\{ 0 \}$

$f'(x) = \dfrac{3\,\text{Arcsin}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

5) Domf $= [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

racines: $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

$f'(x) = -\dfrac{2x}{\sqrt{-x^4+8x^2-15}}$

6) Domf $= [-1-\sqrt{3}, -2] \cup [0, -1+\sqrt{3}]$

racines: $\{-2, 0\}$

$f'(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x}}$

7) Domf = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

racines: $\{ 1 \}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

8) Domf = $[-1-\sqrt{3}, -2] \cup [0, -1+\sqrt{3}]$

racines: $\{-2, 0\}$

$f'(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x}}$

9) Domf = $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}]$

racines: $\emptyset$

$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\ \text{Arcsin}^2(2x)}$

10) Domf = $[0, \sqrt[3]{2}]$

racines: $\{ 0 \}$

$f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - x^6}}$

Calcul de limites

Calculer les limites suivantes (éventuellement en utilisant la règle de l'Hospital)

1) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \text{Arcsin}(2x-1)$

2) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \text{Arccos}(1-x)$

3) $\lim_{x \to 0} \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\text{Arctg}(2x)}$

6) $\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}(x)\right)$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}(x) - 2x}{\sin^3(x)}$

Solutions

1) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} -\text{Arcsin}(1-2\,x) = 0$

2) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \text{Arccos}(1-x)$ n'existe pas

3) $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{3\,x}{\text{Arctg}(2\,x)} = \frac{3}{2}$

6) $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}(x)\right) = 1$

7) $\lim_{x\to 0} (\text{Arcsin}(x) - 2\,x)\,\frac{1}{\sin^3(x)} = -\infty$