

Logarithmes et exponentielles

Exercices récapitulatifs

Traduire sous forme de logarithme

a) $0.001 = 10^{-3}$

b) $2 = \sqrt[3]{8}$

c) $27 = 81^{3/4}$

d) $\frac{1}{4} = 32^{-2/5}$

e) $u = 10^t$

f) $x = e^y$

a) $\log(0.001) = -3$

b) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

c) $\log_{81} 27 = 3/4$

d) $\log_{32} \frac{1}{4} = -2/5$

e) $\log u = t$

f) $\ln x = y$

Traduire sous forme exponentielle

a) $\log_3 27 = 3$

b) $\log_{1/5} \sqrt{5} = \frac{-1}{2}$

c) $\log y = x$

d) $\ln x = y$

a) $3^3 = 27$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1/2} = \sqrt{5}$

c) $10^y = x$

d) $e^y = x$

Calculer sans l'aide d'une calculatrice

- a) $\log 0.001$
 b) $\log_3 \sqrt{27}$
 c) $\log_4 64$
 d) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$
 e) $\log_2 6 - \log_2 3$
 f) $\log_3(-27)$
 g) $\log 5 + \log 2$
 h) $\log_3 36 - \log_9 16$
 i) $3 \log_6 2 - \log_6 3 + 2 \log_6 \frac{3}{2}$

- a) $\log 10^{-3} = -3$
 b) $\log_3 27^{1/2} = \log_3 3^{3/2} = 3/2$
 c) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
 d) $\ln e^{-3} = -3$
 e) $\log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$
 f) $\log_3(-27)$ n'existe pas dans \mathbb{R} . Dom $\log_3 = \mathbb{R}_0^+$
 g) $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$
 h) $\log_3 36 - \log_9 16 = \log_3 36 - \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 36 - \frac{1}{2} \log_3 16 = \log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
 i) $3 \log_6 2 - \log_6 3 + 2 \log_6 \frac{3}{2} = \log_6 8 - \log_6 3 + \log_6 \frac{9}{4} = \log_6 \frac{8 \times 9}{3 \times 4} = \log_6 6 = 1$

Evaluer à l'aide d'une calculatrice à 4 chiffres significatifs

- a) $\ln \pi$
 b) $5 \cdot 10^{1.2}$
 c) $7 - \sqrt{3}$
 d) $\log(-3)$
 e) $\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$
 f) $\log_2 15$

- a) 1.1447
 b) 79.2447
 c) 0.034375
 d) n'existe pas dans \mathbb{R}
 e) 3.9069
 f) 3.9069

Trouver, sans aide de la calculatrice, le meilleur encadrement par deux nombres entiers des réels suivants.

- a) $\log_2 20$
 b) $\log_3 10$
 c) $\log 1254$
 d) $\ln 3$
 e) e^{-3}

- a) $\log_2 16 < \log_2 20 < \log_2 32$ et donc $4 < \log_2 20 < 5$ ($\log_2 20 = 4.3219$)
 b) $\log_3 9 < \log_3 10 < \log_3 27$ et donc $2 < \log_3 10 < 3$ ($\log_3 10 = 2.0959$)
 c) $\log 1000 < \log 1254 < \log 10000$ et donc $3 < \log 1254 < 4$ ($\log 1254 = 0.983$)
 d) $\ln e < \ln 3 < \ln e^2$ et donc $1 < \ln 3 < 2$ ($\ln 3 = 1.09861$)
 e) $0 < e^{-3} < e^0$ et donc $0 < e^{-3} < 1$ ($e^{-3} = 0.049787$)

Résoudre à l'aide de la définition du logarithme.

a) $\log_2 x = -1$

b) $\log_3 \frac{1}{x} = -2$

c) $\log_x 8 = -3$

d) $\log_9 x = \frac{1}{4}$

a) $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{x} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ et donc $x = 9$

c) $8 = x^{-3}$ et donc $x = \frac{1}{2}$

d) $x = 9^{1/4} = \sqrt[4]{9}$

Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

a) $\log_a(xy^3)$

b) $\log_a\left(\frac{r}{u^2}\right)$

c) $\log \sqrt{a^3 b}$

d) $\ln \frac{a^3 b^2}{c}$

e) $\log_a \frac{x}{\sqrt{y^3 z}}$

a) $\log_a x + 3 \log_a y$

b) $\log_a r - 2 \log_a u$

c) $\frac{3}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b$

d) $3 \ln a + 2 \ln b - \ln c$

e) $\log_a x - \frac{3}{2} \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z$

Exprimer sous forme d'un seul logarithme.

a) $\frac{1}{3} \log_a x - 2 \log_a y + \frac{1}{2} \log_a z$

b) $3 \log x + 2 \log y - \frac{1}{4} \log z$

c) $3 \left(\frac{1}{2} \ln u - 5 \ln t \right)$

d) $2 \log_2(x-1) - \log_2 x$

e) $3 \log_2 x + 4 \log_4(x+2)$

a) $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt{z}}{y^2} \right)$

b) $\log \left(\frac{x^3 y^2}{\sqrt[4]{z}} \right)$

c) $\ln \frac{\sqrt{u^3}}{t^{15}}$

d) $\log_2 \frac{(x-1)^2}{x}$

e) $3 \log_2 x + 4 \log_4(x+2) =$

$$\log_2 x^3 + 4 \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 4} = \log_2 x^3 + 2 \log_2(x+2) = \log_2 x^3 + \log_2(x+2)^2 = \log_2(x^3(x+2)^2)$$

Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

a) $\log_a \frac{\sqrt{x-3}}{x^2}$

b) $\log((x-2)^2(x+3)^3)$

c) $\ln \frac{\sqrt{2x-1}}{(1+x)^2}$

a) $\log_a \frac{\sqrt{x-3}}{x^2} = \frac{1}{2} \log_a(x-3) - 2 \log_a x$

b) $2 \log(x-2) + 3 \log(x+3)$

c) $\frac{1}{2} \ln(2x-1) - 2 \ln(1+x)$

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{5^{x-1}}{5^{3-x}}$

b) $\left(\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right)^{2x}$

c) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $\frac{5^{x-1}}{5^{3-x}} = 5^{x-1-(3-x)} = 5^{2x-4}$

b) $\left(\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right)^{2x} = (e^{-3x})^{2x} = e^{-6x^2}$

c) $\frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$

Sachant que $\ln 2 = 0.693147$ et $\ln 5 = 1.60944$, évaluer sans l'aide d'une calculatrice

a) $\ln 10$

b) $\ln 0.4$

c) $\ln \sqrt[3]{20}$

a) $\ln 10 = \ln(2 \cdot 5) = \ln 2 + \ln 5 = 2.30259$

b) $\ln 0.4 = \ln \frac{2}{5} = \ln 2 - \ln 5 = -0.916293$

c) $\ln \sqrt[3]{20} = \frac{1}{3} \ln 20 = \frac{1}{3} \ln(2^2 \cdot 5) = \frac{1}{3} (2 \ln 2 + \ln 5) = 0.998577$

Résoudre dans \mathbb{R}

1) $4^{3x-x^2} - 16 = 0$

2) $3^{x-1} = 9^{1-2x}$

3) $e^{-x} - e^{x^2} = 0$

4) $(e^x)^2 - 16 = 0$

5) $3^x = 6^{x-1}$

6) $10^{2x} + 5 \times 10^x - 6 = 0$

7) $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$

8) $e^{1-x} + e^x = 0$

9) $3^{1-x} + 3^x - 4 = 0$

10) $4x - x e^{-2x} = 0$

1) 1, 2

2) $\frac{3}{5}$

3) -1, 0

4) $2 \ln(2)$

5) $\frac{\ln(2)+\ln(3)}{\ln(2)} = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$

6) 0

7) $\log_2 3$

8) impossible

9) 0, 1

10) 0, $-\ln(2)$

Résoudre

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$

2) $\ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0$

3) $\ln(3x^2) = \ln(9x) + 2$

4) $\log_2(x+3) - \log_2(x) = 2$

5) $\log(\ln(x)) = 1$

6) $\log(x-2) + 1 = \log(2x+1)$

7) $\ln(x^2 - 3) = 2\ln(x-1)$

8) $\log(2x+1) - \log(x-1) = \log x$

9) $3\ln^2(x) - 2\ln(x) = 1$

10) $\ln^2(x) = \ln(x^2)$

11) $\ln^3(x) + \ln(x) - 2 = 0$

1) $\{1\}$

3) $\{3e^2\}$

5) $\{e^{10}\}$

7) $\{2\}$

9) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, e\right\}$

11) $\{e\}$

2) $\{4\}$

4) $\{1\}$

6) $\left\{\frac{21}{8}\right\}$

8) $\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

10) $\{1, e^2\}$

Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

1) $\frac{1}{4} - 4^{x+1} \geq 0$

2) $e^{2x} - 9 \leq 0$

3) $\frac{e^x+1}{e^x-1} < 0$

4) $-3e^{2x} + e^{4x} + 2 < 0$

5) $\frac{1}{e^{x+1}} - 2 > 0$

6) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0$

7) $\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) > 0$

$$8) 2^x + \frac{1}{1-2^x} > 0$$

1) $\leftarrow, -2]$

2) $\leftarrow, \ln(3)]$

3) $\leftarrow, 0[$

4) $]0, \frac{\ln(2)}{2}[$

5) \emptyset

6) $\leftarrow, 0]$

7) \mathbb{R}

8) $\leftarrow, 0[\cup]0.6942, \rightarrow = \leftarrow, 0[\cup]\log_2(1 + \sqrt{5}) - 1, \rightarrow$

Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

1) $\log_2(x+1) - 2 \leq \log_2(3x)$

2) $\log_4(x-1) \geq \log_2(3)$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x) - 1$

4) $\log^2 x + \log x - 2 < 0$

5) $\frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} \geq 0$

6) $\log_7(2x-1) > -2$

7) $\ln(-3+2x) - \ln(-4+x) < 2\ln(5)$

8) $\ln(1+x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

1) $\left[\frac{1}{11}, \rightarrow\right)$

2) $[10, \rightarrow)$

3) $[1, 2]$

4) $\left] \frac{1}{100}, 10\right[$

5) $]0, \frac{1}{e}[\cup [1, \rightarrow)$

6) $\left] \frac{25}{49}, \rightarrow\right)$

7) $\left] \frac{97}{23}, \rightarrow\right)$

8) \emptyset

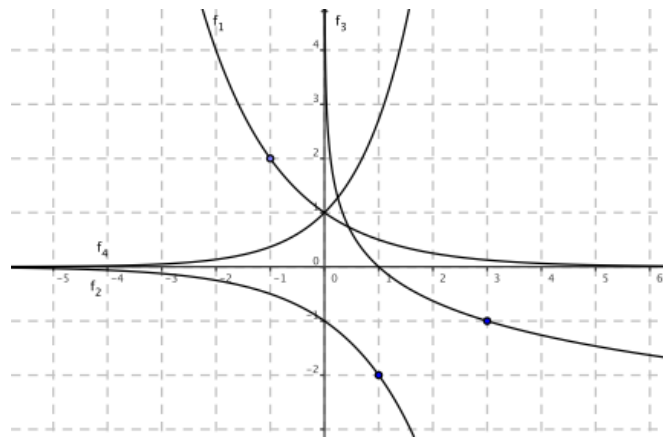
Identifier les fonctions suivantes

$f(x) = e^x$

$g(x) = \log_{1/3} x$

$b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$i(x) = -2^x$



$$f(x) = f_4(x) \quad g(x) = f_3(x) \quad b(x) = f_1(x) \quad i(x) = f_2(x)$$

Tracer le graphe des fonctions suivantes. Préciser leur domaine, leur image, leurs éventuelles racines et asymptotes.

- a) $y = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1 - x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

a) $f(x) = 2^{x+1}$

1. Domaine de définition

Dom $f = \mathbb{R}$

2. Image de f

$]0, \rightarrow$

3. Limites et asymptotes

pas d'asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1} = 0$$

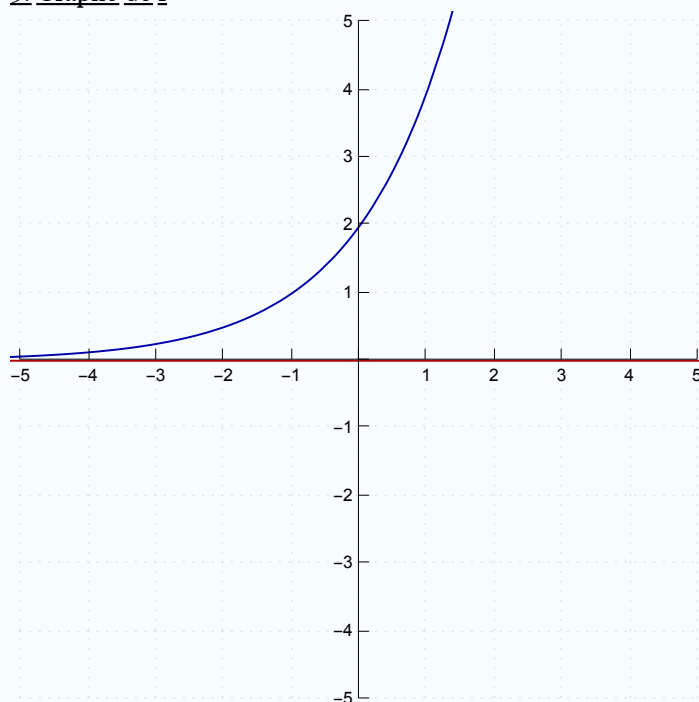
AH $\equiv y = 0$ à gauche

4. Racines

\emptyset

False

5. Graphe de f



b) $f(x) = \log_3(1 - x)$

1. Domaine de définition

Dom $f = \leftarrow, 1[$

2. Image de f

\mathbb{R}

3. Limites et asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 1} \log_3(1 - x) = -\infty$

AV $\equiv x = 1$

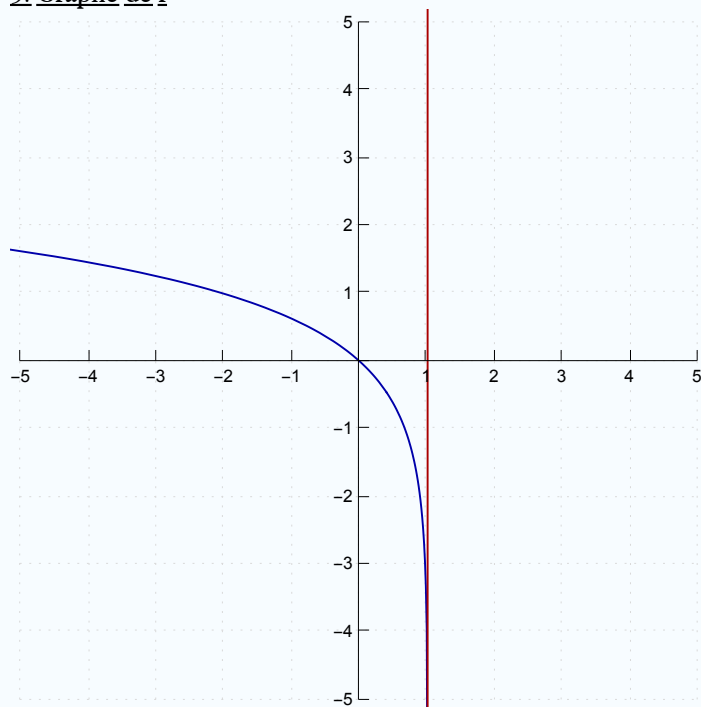
$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3(1 - x)$ n'existe pas

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_3(1 - x) = \infty$

4. Racines

$\{0\}$

$x = 0$

5. Graphe de f 

c) $f(x) = 3^{x+2} - 1$

1. Domaine de définition

Dom $f = \mathbb{R}$

2. Image de f

$] -1, \rightarrow$

3. Limites et asymptotes

pas d'asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{x+2} - 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{x+2} - 1 = -1$$

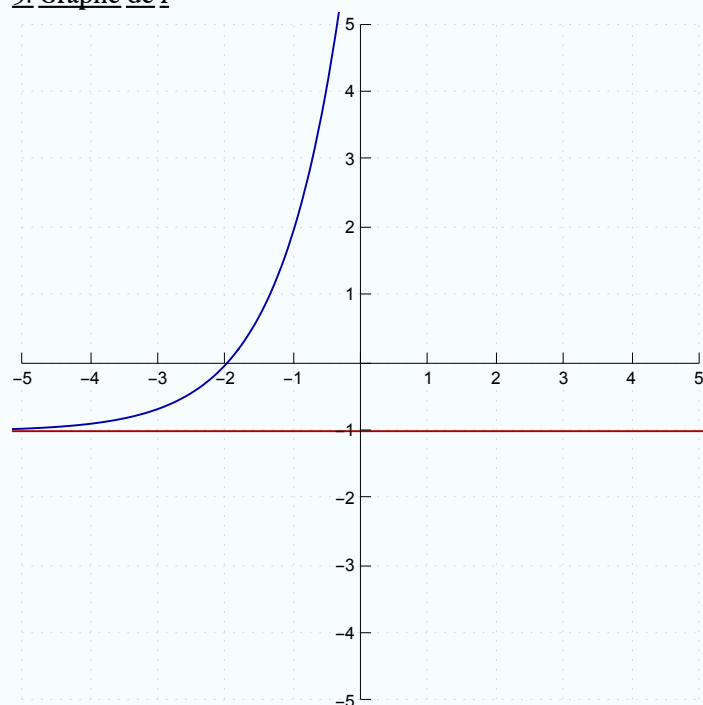
AH $\equiv y = -1$ à gauche

4. Racines

$\{-2\}$

$x = -2$

5. Graphe de f



d) $f(x) = \ln(2x - 1) + 2$

1. Domaine de définition

Dom $f =]\frac{1}{2}, \rightarrow$

2. Image de f \mathbb{R} 3. Limites et asymptotes

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln(2x - 1) + 2 = -\infty$$

AV $\equiv x = \frac{1}{2}$

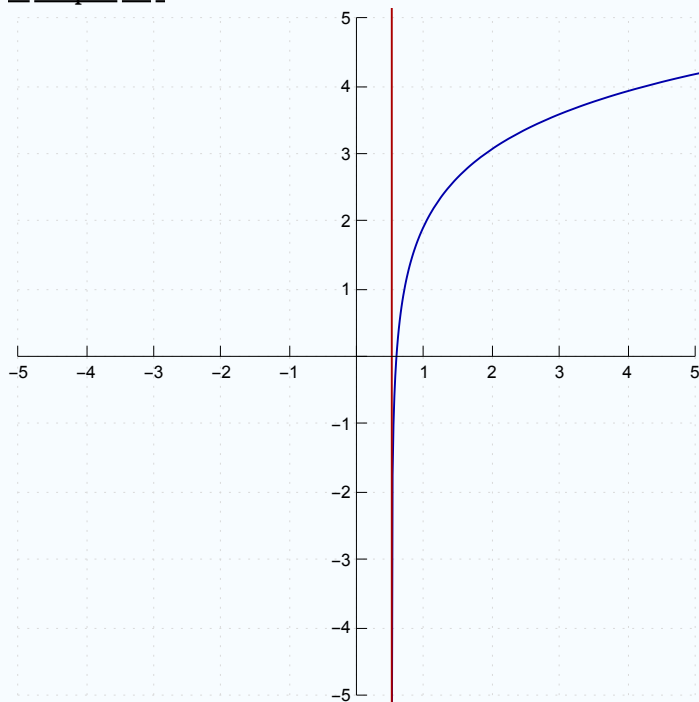
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2x - 1) + 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x - 1) + 2 \text{ n'existe pas}$$

4. Racines

$$\left\{ \frac{1+e^2}{2e^2} \right\}$$

$$x = \frac{1+e^2}{2e^2}$$

5. Graphe de f 

Pour les fonctions suivantes, calculer $f(-2)$

a) $f(x) = 2^{x+1}$

b) $f(x) = \log_3(1 - x)$

c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$

d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

a) $f(-2) = \frac{1}{2}$

b) $f(-2) = 1$

c) $f(-2) = 0$

d) $f(-2)$ n'existe pas dans \mathbb{R}

Déterminer la réciproque des fonctions suivantes et préciser si la réciproque est une fonction.

a) $f(x) = 2^{x+1}$

b) $f(x) = \log_3(1 - x)$

c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$

d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

e) $f(x) = 2 \ln(x+1)$ f) $f(x) = 3^{2x} - 4$

g) $f(x) = 3 - \ln(2x - 5)$

h) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ exrecaplog_sol.nb | 13

a) $f^{-1}(x) = -1 + \log_2 x$

b) $f^{-1}(x) = 1 - 3^x$

c) $f^{-1}(x) = -2 + \log_3(x+1)$

d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{x-2}}{2}$

e) $f^{-1}(x) = -1 + e^{x/2}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_3(x+4)$

g) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} e^{3-x} + \frac{5}{2}$

h) $\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ ce n' est pas une fonction

Prenons une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur. Plions-la en 2, puis encore en 2, puis encore en 2. Quel est le nombre de pliages nécessaire pour obtenir une épaisseur de 1 mètre? Utilisez la calculatrice!

On lance deux dés. Combien de lancers de ces dés faut-il exécuter pour que la probabilité d'obtenir un "double six" soit

a) minimum de 0,5?

b) plus grande que 0,9?

Une usine produit 300 000 unités la première année. La croissance annuelle est de 5%. Après combien d'années la production atteindra-t-elle les 500 000 unités ?

Remarque à propos des pourcentages:

a) augmenter de $i\%$ un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 + \frac{i}{100})$

exemple: augmenter 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 1,08 = 756$

b) diminuer de $i\%$ un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 - \frac{i}{100})$

exemple: diminuer 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 0,92 = 644$

Déterminer la parité

1) $\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

1) $f(-x) = \log_2 \frac{-x-1}{-x+1} = \log_2 \frac{x+1}{x-1} = -\log_2 \frac{x-1}{x+1} = -f(x)$ fonction impaire

2) $f(-x) =$

$$\ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -f(x)$$

fonction impaire

■ Calcule et interprète graphiquement

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0.2^{x-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x = 0$

AH $\equiv y = 0$ à gauche

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$

AH $\equiv y = 0$ à droite

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 0$

AH $\equiv y = 0$ à droite

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0.2^{x-1} = +\infty$

ni asymptote horizontale ni asymptote oblique

Dérive les fonctions suivantes

1) $x e^x$

2) $e^{\sin(x)}$

3) $\sqrt{1 - e^{2x}}$

4) $e^{\text{Arccos}(x)}$

5) $e^{\text{tg}(3x)}$

6) $\cos(\ln(x))$

7) 3^{2x-5}

8) $\log_2(x^3)$

9) $\ln^2(3x)$

10) $2^{\text{Arcsin}(x)}$

1) $e^x (x + 1)$

2) $e^{\sin(x)} \cos(x)$

3) $-\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

4) $-\frac{e^{\text{Arccos}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $3 e^{\text{tg}(3x)} \frac{1}{\cos^2(3x)}$

6) $-\frac{\sin(\ln(x))}{x}$

7) $2 \times 3^{2x-5} \ln(3)$

8) $\frac{3}{x \ln(2)}$

9) $\frac{2 \ln(3x)}{x}$

10) $\frac{2^{\text{Arcsin}(x)} \ln(2)}{\sqrt{1-x^2}}$

Etudier les fonctions suivantes

1) $\frac{e^x}{x}$

2) $x^2 e^x$

3) e^{-x^2}

4) $e^{2x} - 2 e^x$

5) $\frac{\ln(x)}{x}$

6) $\ln(|x^2 - 1|)$

7) $\frac{1}{\ln^2(x)-4}$

8) $x - \ln(x - 1)$

9) $\sqrt{1 - e^x}$

10) $x \ln(x)$