

TEST 00 - PROBABILITÉS

- On considère une urne contenant 3 boules blanches, 2 boules rouges et 4 boules noires.



1. On choisit au hasard et sans remise 4 boules de l'urne.

Quelle est la probabilité

- a) d'obtenir 4 boules noires ?
- b) d'obtenir exactement 3 boules noires ?
- c) d'obtenir 2 boules noires et 2 boules blanches ?

2. Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

1. SANS REMISE

a) Il n'y a qu'une manière de tirer 4 boules noires: NNNN donc

$$P(\text{NNNN}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{126} = 0,00793651$$

$$\text{autre méthode: } p = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

L'expérience consiste à tirer 4 boules d'une urne en contenant 9, sans tenir compte de l'ordre donc il y a

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126 \text{ tirages possibles.}$$

Pour obtenir 4 boules noires il faut tirer 4 boules noires parmi les 4, il y a donc $C_4^4 = 1$ possibilité.

$$P(4 N) = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}} = \frac{1}{C_9^4} = \frac{1}{126} = 0,00793651$$

b) il faut donc tirer 3 boules noires et une autre boule (rouge ou blanche); par exemple, on peut tirer NNNX (où X est une boule blanche ou rouge);

$$P(\text{NNNX}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{126}$$

mais on peut aussi tirer les boules dans un ordre différent: NNXN $\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{126}\right)$ et aussi NXNN, XNNN.

Il y a donc 4 possibilités pour tirer 3 boules noires, de même probabilité

$$\text{et donc } P(3N) = 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{63} = 0,15873 \quad \text{un peu moins de 16\% de chances}$$

autre méthode: $p = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}}$

L'expérience consiste à tirer 4 boules d'une urne en contenant 9, sans tenir compte de l'ordre donc il y a

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126 \text{ tirages possibles.}$$

Pour obtenir 3 boules noires il faut tirer 3 boules noires parmi les 4: il y a donc $C_4^3 = 4$ possibilités et aussi tirer une boule qui n'est pas noire parmi les 5 autres boules (rouges ou blanches): $C_5^1 = 5$ possibilités; ce qui donne

$$\text{NCF} = C_4^3 C_5^1 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$P(4N) = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}} = \frac{C_4^3 C_5^1}{C_9^4} = \frac{20}{126} = \frac{10}{63} = 0,15873$$

c) il faut donc tirer 2 boules noires et 2 boules rouges; par exemple, on peut tirer NNBB;

$$P(\text{NNBB}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{42}$$

mais on peut aussi tirer les boules dans un ordre différent: NBNB, NBBN, ... tirages ayant la même probabilité que NNBB;

combien de tirages sont possibles ? c'est le nombre d'anagrammes du mot NNBB = $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

(il y a 4 emplacements _ _ _ _ et on cherche de combien de manières on peut placer 2N, il faut donc choisir 2

emplacements parmi 4 ce qui donne $C_4^2 = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$; une fois les 2 N placés, il n'y a plus qu'une manière de placer les B.)

$$\text{On obtient donc } P(2 \text{ N et } 2 \text{ B}) = C_4^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} = 0,142857$$

autre méthode: $p = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}}$

L'expérience consiste à tirer 4 boules d'une urne en contenant 9, sans tenir compte de l'ordre donc il y a

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126 \text{ tirages possibles.}$$

Pour obtenir 2 boules noires et 2 blanches, il faut tirer 2 boules noires parmi les 4: il y a donc $C_4^2 = 6$ possibilités et aussi tirer 2 boules blanches parmi les 3 boules blanches: $C_3^2 = 3$ possibilités; ce qui donne

$$\text{NCF} = C_4^2 C_3^2 = 6 \cdot 3 = 18$$

$$P(4 \text{ N}) = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}} = \frac{C_4^2 C_3^2}{C_9^4} = \frac{18}{126} = \frac{1}{7} = 0,142857$$

$$\frac{C_3^2 C_4^2}{C_9^4} = \frac{\frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{(2!)^2}}{\frac{9!}{4! \cdot 5!}} = \frac{1}{7} = 0,142857$$

2. AVEC REMISE

a) Il n'y a qu'une manière de tirer 4 boules noires: NNNN donc

$$P(\text{NNNN}) = \frac{4}{9} \frac{4}{9} \frac{4}{9} \frac{4}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^4 = \frac{256}{6561} = 0,0390184$$

b) il faut donc tirer 3 boules noires et une autre boule (rouge ou blanche); par exemple, on peut tirer NNNX (où X est une boule blanche ou rouge);

$$P(\text{NNNX}) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 \frac{5}{9} = \frac{320}{6561}$$

mais on peut aussi tirer les boules dans un ordre différent: NNXN $\left(\frac{4}{9} \frac{4}{9} \frac{5}{9} \frac{4}{9} = \frac{320}{6561}\right)$ et aussi NXNN, XNNN.

Il y a donc 4 possibilités pour tirer 3 boules noires, de même probabilité

$$\text{et donc } P(3 N) = 4 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \frac{5}{9} = \frac{1280}{6561} = 0,195092 \text{ un peu moins de 20\% de chances}$$

c) il faut donc tirer 2 boules noires et 2 boules rouges; par exemple, on peut tirer NNBB;

$$P(\text{NNBB}) = \frac{4}{9} \frac{4}{9} \frac{3}{9} \frac{3}{9} = \frac{16}{729}$$

mais on peut aussi tirer les boules dans un ordre différent: NBNB, NBBN, ... tirages ayant la même probabilité que NNBB;

combien de tirages sont possibles ? c'est le nombre d'anagrammes du mot NNBB = $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

(il y a 4 emplacements _ _ _ _ et on cherche de combien de manières on peut placer 2N, il faut donc choisir 2

emplacements parmi 4 ce qui donne $C_4^2 = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$; une fois les 2 N placés, il n'y a plus qu'une manière de placer

les B.)

$$\text{On obtient donc } P(2 N \text{ et } 2 B) = C_4^2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{3}{9}\right)^2 = 6 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{32}{243} = 0,131687$$