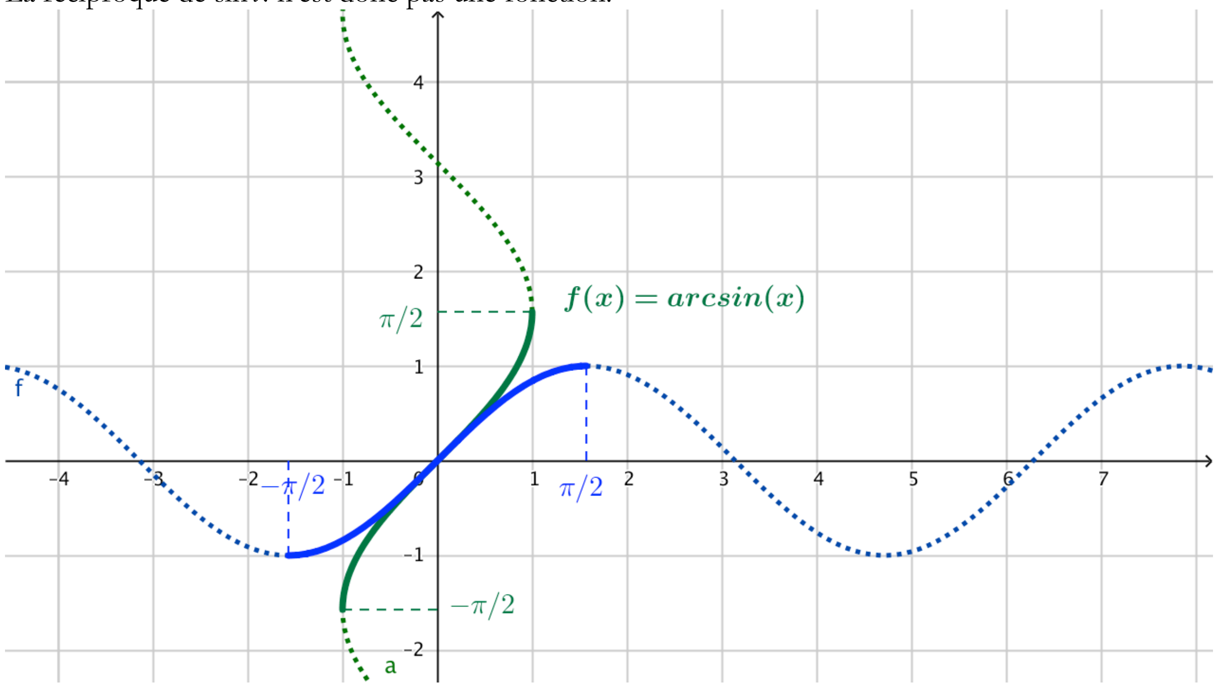
■ Fonctions cyclométriques

1. Fonction Arcsinus

La fonction $\sin x$ n'est pas injective.

En effet, prenons $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ et $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \dfrac{1}{2} = f(x_2)$.

La réciproque de $\sin x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreint la fonction sinus à l'intervalle $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

lien Geogebra

- Définition

$$\forall\, x \in [-1, 1] : \text{Arcsin}\, x = y \Longleftrightarrow \sin y = x \text{ et } y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dom $f = [-1, 1]$ et Im $f = \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

- Racine(s): $x = 0$

  en effet, $\text{Arcsin}\, 0 = 0$

- Parité: Arcsin est une fonction impaire

  $\forall\, x \in [-1, 1] : \text{Arcsin}(-x) = x$

- Propriétés

  (1) $\forall\, x \in [-1, 1] : \sin(\text{Arcsin}\, x) = x$

  (2) $\forall\, x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] : \text{Arcsin}(\sin x) = x$

⚠ La propriété $\forall\, x \in \mathbb{R} : \text{Arcsin}(\sin x) = x$ est fausse !

Par exemple, $\text{Arcsin}\left(\sin \dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{Arcsin}\, \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{5\pi}{6}$

- Continuité

  $\forall\, a \in [-1, 1] : \lim\limits_{x \to a} \text{Arcsin}\, x = \text{Arcsin}\, a$

  Arcsin est continue sur $[-1, 1]$

- Dérivée

$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin } x)}$$

sachant que $\cos^2 t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t}$ et que Arcsin $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin } x)}}$$

et à l'aide de la propriété (1)

$$\boxed{(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Croissance

La fonction Arcsin x est strictement croissante sur $[-1, 1]$

x		-1		1	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	/	|	+	|	/
$f(x)$	/	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$	/

Remarque: Pour $x = -1$ et $x = 1$, la dérivée de Arcsin n'existe pas.

On a $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne une tangente verticale en -1 et 1.

- Concavité

$$(\text{Arcsin } x)'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

x		-1		0		1	
$\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	/	|	$-$	0	$+$	|	/
$f(x)$	/	$-\frac{\pi}{2}$	⌢	0	⌣	$\frac{\pi}{2}$	/

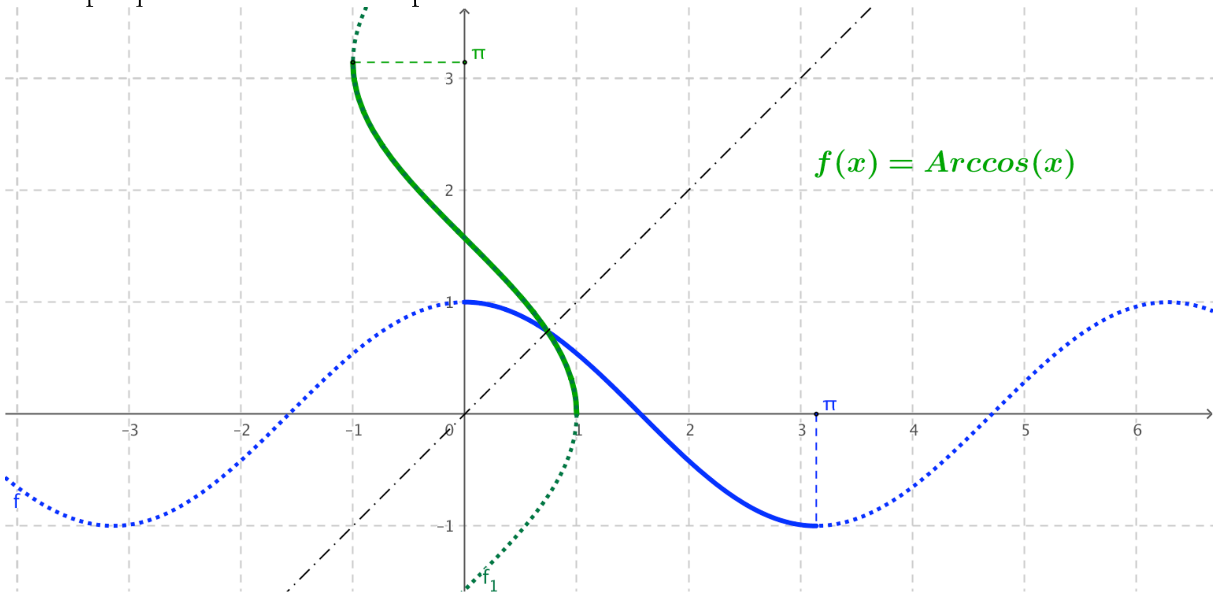
point d'inflexion I : (0,0)

2. Fonction Arccosinus

La fonction $\cos x$ n'est pas injective.

Prenons $x_1 = \frac{\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{\pi}{6}$. On a alors $f(x_1) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos -\frac{\pi}{6} = f(x_2)$.

La réciproque de $\cos x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreint la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

lien Geogebra

- Définition

$$\forall\, x \in [-1, 1] : \text{Arccos}\, x = y \Longleftrightarrow \cos y = x \text{ et } y \in [0, \pi]$$

- dom Arccos $= [-1, 1]$ im Arccos $= [0, \pi]$

- Racine(s): $x = 1$

  Arccos $1 = 0$ car $\cos 0 = 1$

- Parité: Arccos n'est ni paire ni impaire

- Propriétés

  (1) $\forall\, x \in [-1, 1]: \cos(\text{Arccos}\, x) = x$

  (2) $\forall\, x \in [0, \pi]: \text{Arcos}(\cos x) = x$

  ⚠ La propriété $\forall\, x \in \mathbb{R}: \text{Arccos}(\cos x) = x$ est fausse !

  En effet, $\text{Arccos}\left(\cos\frac{-\pi}{4}\right) = \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{-\pi}{4}$

- Continuité

  $\forall\, a \in [-1, 1]: \lim_{x \to a} \text{Arccos}\, x = \text{Arccos}\, a$

  Arccos est continue sur $[-1, 1]$

- Dérivée

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}\, x)}$$

sachant que $\sin^2 t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}$ et que $\text{Arccos}\, x \in [0, \pi]$, on a

$$(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}\, x)}}$$

et à l'aide de la propriété (1)

$$\boxed{(\text{Arccos}\, x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Croissance:

La fonction Arccos x est strictement croissante sur $[-1, 1]$

x		-1		1	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	/	$\Vert$	$-$	$\Vert$	/
$f(x)$	/	π	$\searrow$	0	/

Remarque: Pour $x = -1$ et $x = 1$, la dérivée de Arccos n'existe pas.

On a $\lim_{x\to -1^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ce qui donne une tangente verticale en -1 et 1.

- Concavité

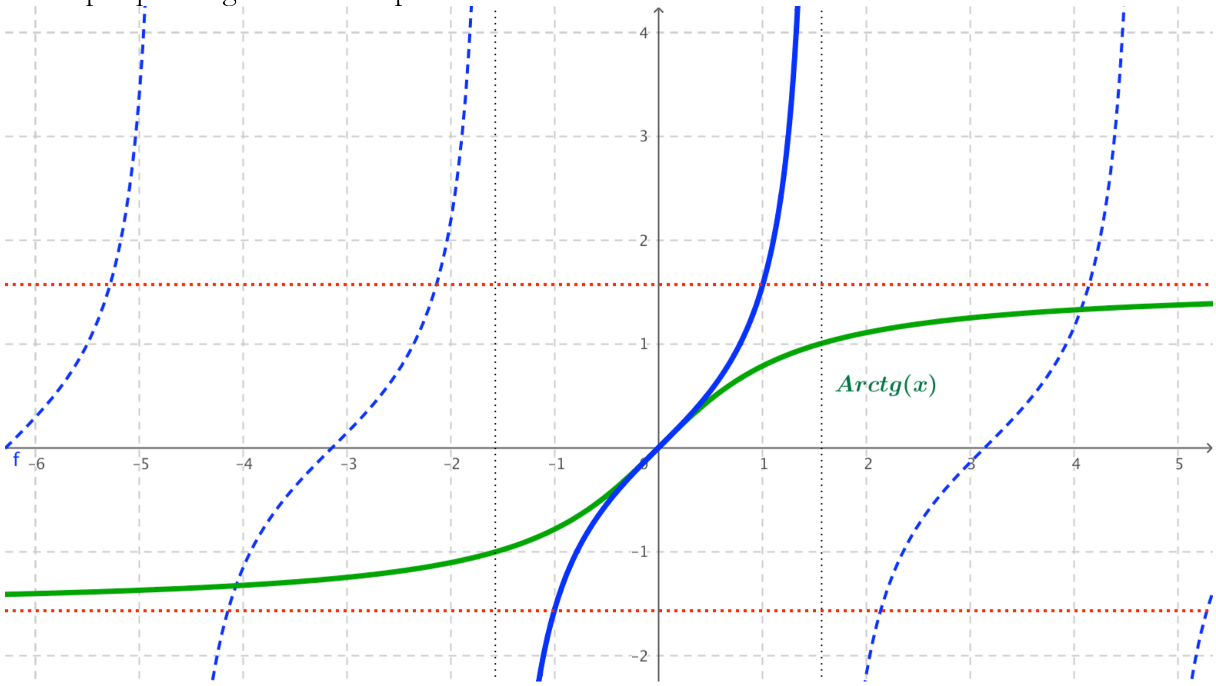
$$(\text{Arccos}\, x)'' = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

x		-1		0		1	
$-\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	/	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	/
$f(x)$	/	π	$\smile$	$\frac{\pi}{2}$	$\frown$	0	/

point d'inflexion $\text{I} : (0, \frac{\pi}{2})$

3. Fonction Arctangente

La fonction $\operatorname{tg} x$ n'est pas injective.
Prenons $x_1 = 0$ et $x_2 = \pi$. On a alors $f(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0 = \operatorname{tg} \pi = f(x_2)$.
La réciproque de $\operatorname{tg} x$ n'est donc pas une fonction.



Pour obtenir une réciproque fonctionnelle, on restreint la fonction tangente à l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

lien Geogebra

- Définition

$\forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, \operatorname{Arctg} x = y \Longleftrightarrow \operatorname{tg} y = x$ et $y \in\,]-\pi/2\,,\pi/2[$

- dom Arctg $= \mathbb{R}$ im Arctg $=]-\pi/2\,,\pi/2[$

- Racine(s): $x = 0$
  en effet: $\operatorname{Arctg}(0) = 0$

- Parité: Arctg est une fonction impaire
  $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{Arctg}(-x) = x$

- Propriétés:
  (1) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x$
  (2) $\forall\, x \in [0, \pi] :\ \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x$

⚠ La propriété $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} :\ \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ est fausse !
En effet, $\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} \pi) = \operatorname{Arctg} 0 = 0 \neq \pi$

- Dérivée

$$(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\text{Arctg}\, x)}}$$

sachant que $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \text{tg}^2\, t$,

$$(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{Arctg}\, x)}$$

et en utilisant la proposition (1)

$$\boxed{(\text{Arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

- Croissance

La fonction Arctg x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	
$\frac{1}{x^2+1}$	+
$f(x)$	↗

- Concavité

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x		0	
$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	+	0	−
$f(x)$	$\smile$	0	$\frown$

point d'inflexion I : (0,0)

4. Exercices

- 4.1 Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$: $\text{tg}(2\, \text{Arctg}\, x) = \frac{2x}{1 - x^2}$

- 4.2 Montrer que $4\, \text{Arctg}\, \frac{1}{5} - \text{Arctg}\, \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

- 4.3 On considère la fonction $f(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$

  a) Déterminer le domaine de définition
  b) Déterminer la parité
  c) Faites l'étude de f. Déterminer les demi-tangentes aux points angulaires.

- 4.4 Étudier la fonction $f(x) = \text{Arctg}\, \frac{1+x}{1-x}$

- 4.5 Étudier la fonction $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$